Roll No.								

24614-MJ

B.Sc. VI SEMESTER [MAIN] EXAMINATION
JUNE - JULY 2024

MATHEMATICS
[Linear Algebra]
[Major Subject]

[Max. Marks : 60] *[Time : 3:00 Hrs.]*

Note : All THREE Sections are compulsory. Student should not write any thing on question paper.
नोट : सभी तीन खण्ड अनिवार्य हैं। विद्यार्थी प्रश्न–पत्र पर कुछ न लिखें।

[Section - A]

This Section contains **Multiple Choice Questions**. Each question carries **1 Mark**. All questions are compulsory.
इस खण्ड में **बहुविकल्पीय प्रश्न** हैं। प्रत्येक प्रश्न **1 अंक** का है। सभी प्रश्न अनिवार्य है।

Q. 01 If $\{\alpha, \beta\}$ is an orthonormal set in an inner product space, then distance between α and β is -
यदि $\{\alpha, \beta\}$ आन्तर गुणन समष्टि में एक प्रसामान्य समुच्चय हो तब α तथा β के बीच दूरी है -

a) 0 **b)** 1

c) $\sqrt{2}$ **d)** 2

Q. 02 The quadratic form corresponding to the symmetric matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ is}$$

सममित आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ के संगत द्विघात रूप है –

a) $q = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 x_2 + 6x_1 x_3 - 6x_2 x_3$

b) $q = x_1^2 + x_3^2 + 4x_1 x_2 - 6x_1 x_3 + 6x_2 x_3$

c) $q = x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 x_2 - 6x_1 x_3 - 6x_2 x_3$

d) $q = x_1^2 + x_3^2 - 4x_1 x_2 - 6x_1 x_3 + 6x_2 x_3$

Q. 03 A linear transformation $T \in L(U, V)$ is self-adjoint or Hermitian if -

एक रैखिक रूपान्तरण $T \in L(U, V)$ सेल्फ–एडजोइन्ट या हर्मितीय है यदि -

a) $T \neq T^*$ **b)** $T^* = T$

c) $T^{**} = T$ **d)** None of these

Q. 04 Let A and B are n x n matrices with complex coefficients and exponential matrices e^A and e^B, then $e^{A+B} = e^A . e^B$ if

माना A तथा B सम्मिश्र गुणांकों वाली n x n आव्यूह है तथा e^A तथा e^B चर घातांकी आव्यूह है तब $e^{A+B} = e^A . e^B$ है यदि

a) $AB = BA$ **b)** $AB \neq BA$

c) $AB = I$ **d)** None of these

Q. 05 The set of symmetric matrices $M_n(\mathbb{R})$ forms a subspace of dimension -

सममित आव्यूहों का समुच्चय $M_n(\mathbb{R})$ उपसमष्टि बनाता है जिसकी विमा है -

a) $\frac{n(n-1)}{2}$ **b)** $\frac{n(n+1)}{2}$

c) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **d)** 0

[Section - B]

This Section contains **Short Answer Type Questions.** Attempt **any five** questions in this section in 200 words each. Each question carries 7 **Marks.**

इस खण्ड में **लघुउत्तरीय प्रश्न** हैं। इस खण्ड में **किन्हीं पांच** प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 200 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न **7 अंक** का है।

Q. 01 In an inner product space V(F) prove that -

एक आन्तर गुणन समष्टि V(F) में सिद्ध कीजिये -

$|(\alpha, \beta)| \leq ||\alpha|| . ||\beta||$

Q. 02 Prove that any orthonormal set of vectors in an inner product space is linearly independent.

सिद्ध कीजिये कि आन्तर गुणन समष्टि में प्रसामान्य लाम्बिक सदिशों का कोई समुच्चय एकघाततः स्वतंत्र होता है।

Q. 03 Reduce the following quadratic form into canonical form -

निम्न द्विघातीय रूप को कैनोनीकल रूप में समानयित कीजिये –

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 9x_4^2 - 2x_1 x_2 - 4x_2 x_3 + 6x_2 x_4 - 6x_4 x_1 - 12x_4 x_3$$

Cont. . .

Q. 04 Let A be a real symmetric matrix with distinct eigen values. Let P be the matrix whose columns represent normalized eigen vector of A. Then show that P is orthogonal matrix.

माना A भिन्न–भिन्न आइगेन मानों वाली वास्तविक सममित आव्यूह है। माना P वो आव्यूह है जिसके स्तम्भ प्रसामान्य लाम्बिक सदिश निरूपित करते हैं, तब सिद्ध कीजिये कि P लाम्बिक आव्यूह है।

Q. 05 If V is a vector space over an algebraically closed field F, then show that every irreducible invariant subspace W relative to $T \in L(V, V)$ has dimension 1 or 2.

यदि V बीजीय संवृत क्षेत्र F पर एक सदिश समष्टि हो तब सिद्ध कीजिये $T \in L(V, V)$ के सापेक्ष प्रत्येक अपरिवर्तनीय अचल उपसमष्टि की विमा 1 या 2 होती है।

Q. 06 Let $u = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, $v = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ belong to the vector space $V = C_n$ and define $(u, v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}$ then show that

माना $u = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, $v = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ सदिश समष्टि $V = C_n$ के सदिश है जहां $(u, v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}$ द्वारा परिभाषित है। तब सिद्ध कीजिये

i) $\langle u_1+u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$

ii) $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u , v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$

iii) $\langle au, v \rangle = a \langle u , v \rangle$

iv) $\langle u, av \rangle = \overline{a} \langle u , v \rangle$

Q. 07 Show that the vector differential equation $\frac{dy}{dt} = Ay$

where A is an arbitrary constant matrix with real coefficients, has the solution $y(t) = e^{tA} . y_0$ which takes on the initial value y_0 when $t = 0$

दर्शाइये कि सदिश अवकल समीकरण $\frac{dy}{dt} = Ay$

जहां A स्वेच्छ अचर आव्यूह है जिसके गुणांक वास्तविक है, हल $y(t) = e^{tA} . y_0$ रखता है जहाँ प्रारंभिक मान $t = 0$ पर y_0 है।

Q. 08 If $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Show that $AB \neq BA$. Calculate e^A, e^B, e^{A+B} and show that $e^{A+B} \neq e^A . e^B$

P.T.O.

यदि $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

दर्शाइये $AB \neq BA$ गणना कीजिये e^A, e^B, e^{A+B} तथा दर्शाइये $e^{A+B} \neq e^A . e^B$

[Section - C]

This section contains **Essay Type Questions**. Attempt **any two** questions in this section in 500 words each. Each question carries **10 marks**.

इस खण्ड में **दीर्घउत्तरीय प्रश्न** हैं। इस खण्ड में **किन्हीं दो** प्रश्नों को हल करें। प्रत्येक उत्तर 500 शब्दों में लिखें। प्रत्येक प्रश्न **10 अंकों** का है।

Q. 09 Apply the Gram-Schmidt orthogonalization process to obtain orthonormal basis from the basis $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ of $V_3(R)$ where $\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, -2)$, $\beta_3 = (2, -1, 1)$

ग्राम स्मिट लाम्बीकरण विधि का प्रयोग करके आधार $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ से प्रसामान्य लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिये जहाँ $\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, -2)$, $\beta_3 = (2, -1, 1)$

Q. 10 Reduce the following conic to its principal axes -

निम्न शांकव का उसके मुख्य अक्षों में समानयन कीजिये –

$7x^2 + 52\,xy - 32\,y^2 = 180$

Q. 11 State and prove principal axis theorem.

मुख्य अक्ष प्रमेय का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

Q. 12 Show that every n x n matrix A can be expressed $A = ½ (A+A^t) + ½ (A-A^t)$ as a sum of a symmetric matrix $½(A+A^t)$ and a skew symmetric matrix $½ (A-A^t)$

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक n x n आव्यूह A को सममित आव्यूह $½ (A+A^t)$ तथा विषम सममित आव्यूह $½(A-A^t)$ के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अर्थात $A = ½ (A+A^t) + (A-A^t)$

———o———